ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Τομέας Μαθηματικών
Πολυτεχνειούπολη – Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80
ΤΗΛ. : 772 1774
FAX : 772 1775
jspil@math.ntua.gr
τηλ.2107721708

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
7ο ΣΕΜΦΕ
ΜΑΡΤΙΟΣ 2014

1°) Έστω χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

α) Δώστε τον ορισμό ενός συστήματος Dynkin υποσυνόλων του Ω

β) Έστω κλάσεις $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ υποσυνόλων του Ω, κλειστές στην πεπερασμένη τομή. Δείξτε ότι: Αν $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ ανεξάρτητες τότε οι σ-άλγεβρες $\sigma(\mathcal{E})$, $\sigma(\mathcal{H})$ είναι ανεξάρτητες.

2°) Έστω ακολουθία τ.μ. $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ και τ.μ. X ορισμένων στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Α) Αν για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ ισχύει: $\sum_{n=1}^{\infty} P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) < +\infty$, δείξτε ότι $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$

Β) Αν $X_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n+2} & \text{με πιθ. } 1/3^n \\ \frac{1}{2n} & \text{με πιθ. } 1 - 1/3^n \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} 0$

3°) Έστω ακολουθία ανεξάρτητων, ομοιόμορφα κατανεμημένων τ.μ. $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ με κοινή σ.π.π. f, ορισμένων στον χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Έστω

$A_n = \{\omega \in \Omega : \max_{k<n} X_k(\omega) < X_n(\omega)\}$, $n \in \mathbb{N}$.

α) Δείξτε ότι τα $A_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ανεξάρτητα και βρείτε την $P(A_n)$

β) Βρείτε την $P(\limsup A_n)$

(Υπόδειξη: $\int \cdots \int_{\{0<x_1<\cdots<x_n\}} f(x_1)\cdots f(x_n)\,dx_1\cdots dx_n = \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$

$\int \cdots \int_{\{0<x_i<x_k \ \forall i=1,\dots,k-1\}} f(x_1)\cdots f(x_k)\,dx_1\cdots dx_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$).

4°) Έστω $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x > 0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}$ και τ.μ. Y με σ.π.π. την f. Έστω $a > 0$

και $X_n = a^n I_{\{Y > n\}}$, $n \in \mathbb{N}$

α) Δείξτε ότι $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} 0$

β) Ισχύει ότι $X_n \xrightarrow{L^1} 0$;